Lösung Blatt 7 Nr 5:

a) Sei $F \in \mathscr{P}_0^2(\mathbb{R})$ und $(X_i)_{i\geq 1}$ u.i.v., $X_1 \stackrel{d}{=} F$. Dann ist $(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} X_i)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in L^2, denn

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=m}^n \frac{1}{i} X_i\Big)^2 \stackrel{Erw.ist0}{=} \operatorname{Var}\Big(\sum_{i=m}^n \frac{1}{i} X_i\Big) = \sum_{i=m}^n \frac{1}{i^2} \mathbb{E} X_1^2 < \varepsilon$$

für $\varepsilon > 0$ und alle n, m hinreichend groß. Die Vollständigkeit von L^2 impliziert die Konvergenz der Partialsummen gegen $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} X_i$ in L^2. Insbesondere gilt diese Konvergenz auch in L^1 und

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} X_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} X_i\Big) = 0.$$

b) Gegenbeispiel: Wähle $X_i = 1$ für alle $i \geq 1$. Widerspruch anhand harmonischer Reihe.